

# Алгоритм оперативного определения слабых звеньев сети, приводящих к нарушению статической устойчивости

Абдурахманов А.М., Зимин К.А.  
АО "Научно-технический центр ФСК ЕЭС"  
г. Москва, Российская Федерация  
[abdurahmanov@ntc-power.ru](mailto:abdurahmanov@ntc-power.ru)

Рябченко В.Н.  
Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
г. Москва, Российская Федерация  
[ryabchenko.vn@gmail.com](mailto:ryabchenko.vn@gmail.com)

**Аннотация.** Рассмотрен вычислительный матричный алгоритм, позволяющий оперативно определять слабые звенья, приводящие к нарушению статической устойчивости линейной модели электроэнергетической системы. В основе алгоритма лежит метод частичного решения линейного матричного уравнения на основе использования делителей нуля (аннуляторов) матриц. Возможности алгоритма продемонстрированы на модели объединенной энергосистемы с матрицей Якоби, содержащей 286 узлов, 531 ветвей и 129 генераторов.

**Ключевые слова:** электроэнергетическая система, слабые звенья, статическая устойчивость, матрица Якоби, линейное матричное уравнение, частичное решение, делитель нуля (аннулятор) матрицы.

## ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении задачи определения слабых звеньев (или так называемых сенсоров) электроэнергетической системы по условиям статической устойчивости возникает трудность, связанная с ее относительно слабой математической формализацией. Обычно под слабыми звеньями понимают "места нарушения устойчивости" [1]. Однако, такой подход не совсем корректен с точки зрения понятия статической устойчивости, согласно которому нарушение статической устойчивости является общим для всей электроэнергетической системы (ЭЭС). Достаточно строгий подход к выделению слабых звеньев ЭЭС сформулирован в [2]. В настоящей работе изложен подход, направленных на решение ряда задач, не рассмотренных в [2-4].

Под определением слабых звеньев будем понимать выделение (определение) мест или элементов ЭЭС, изменение параметров которых наиболее сильно влияет на статическую устойчивость всей системы [2]. Информация об этих элементах может быть получена на основе анализа матрицы Якоби  $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ , отвечающей свободному члену  $a_0$  характеристического полинома

$$\det \left( p\mathbf{E}_n - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (1)$$

линеаризованной в окрестности нормального режима системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

описывающей переходные процессы в ЭЭС. В правой части уравнения (1) матрица  $\mathbf{E}_n$  является единичной матрицей размера  $n \times n$ .

Компоненты матрицы Якоби  $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$  являются функциями структурных и режимных параметров ЭЭС. Известно, что [5]

$$\det \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = a_0 \quad (3)$$

и

$$\text{sp} \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = a_{n-1}. \quad (4)$$

В (4) символ  $\text{sp}(\cdot)$  обозначает след матрицы, т.е. сумму диагональных элементов. В дальнейшем для сокращения записи будем пользоваться обозначением

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}. \quad (5)$$

Предположим, что режим ЭЭС является предельным по статической устойчивости, т.е.

$$a_0 = \det \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \det \mathbf{A} = 0. \quad (6)$$

Путем изменения схемы сети или условий работы источников и потребителей электрической энергии, ЭЭС может быть переведена в новое состояние, характеризующееся некоторым запасом устойчивости. Состав и характер этих мероприятий зависит от решаемой задачи и может определяться как на стадии проектирования, так и непосредственно при эксплуатации ЭЭС.

Принимаемые при проектировании решения связаны, в основном, с введением новых элементов (линий электропередачи, генераторов, компенсирующих устройств и т.д.), а так же средств управления ими. К способам, применяемым непосредственно в процессе функционирования электрической системы, можно отнести [1]:

- изменение коэффициентов усиления и уставок автоматических регуляторов возбуждения генераторов;
- форсировку устройств продольной емкостной компенсации;
- изменение режимов работы источников и потребителей электрической энергии и т.д.

Эти воздействия могут выполняться в разных системах и приводить к различному эффекту. Поэтому под выделением слабых звеньев естественно понимать место приложения и состав мероприятий, обеспечивающих повышение запаса устойчивости и наиболее рациональных с технико-экономической точки зрения.

Описанные мероприятия можно разделить на [2]:  
 - режимные, связанные, в основном, с изменением режимов работы генераторов, синхронных компенсаторов, узлов нагрузки и т.д.,  
 - структурные, приводящие к изменению параметров, характеризующих структуру ЭЭС.

Математически задача определения наиболее эффективных режимных мероприятий может сформулирована следующим образом.

Для заданной точки предельного режима  $\mathbf{x}_{i\delta}, \mathbf{y}_{i\delta}$  (здесь  $\mathbf{x}_{i\delta}$  – вектор нерегулируемых параметров,  $\mathbf{y}_{i\delta}$  – вектор регулируемых параметров) найти (локальное) направление изменения режима в пространстве регулируемых параметров  $\mathbf{y}$ , обеспечивающее наибольшее возрастание  $\det \mathbf{A}$ .

Направление наибольшего увеличения  $\det \mathbf{A} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (7)

определяется градиентом этой функции  $\text{grad}_{\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,

совпадающим с направлением нормали к поверхности уровня, которой в данном случае является поверхность  $\mathcal{L}$ , отвечающая нулевому значению (7).

Введем понятие *собственного вектора* числовой матрицы. Известно [6], что действие матрицы  $\mathbf{A}$  на некоторый вектор  $\mathbf{v}$  приводит к тому, что образ (результат произведения)  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  испытывает относительно прообраза  $\mathbf{v}$  преобразование вращения и растяжения (или сжатия). Известно также, что существуют векторы  $\mathbf{r}$ , для которых образы

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \quad (8)$$

относительно прообраза не меняют своего направления в пространстве. Эти векторы получили название *правых* собственных векторов, а числа  $\lambda$  – собственных чисел.

Аналогичным образом определяются *левые* собственные векторы  $\mathbf{l}$ :

$$\mathbf{l}^* \mathbf{A} = \lambda \mathbf{l}^*, \quad (9)$$

где  $*$  – символ операции эрмитова сопряжения.

Матрица  $\mathbf{A}$  может иметь не более чем  $n$  различных собственных чисел  $\lambda$ , удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$\det(\lambda \mathbf{E}_n - \mathbf{A}) = 0.$$

Матрицу  $\mathbf{A}$ , у которой все левые и правые собственные векторы линейно независимы, принято называть *недефектной (простой)* [6].

Для простой матрицы справедливо утверждение о том, что для нее (и только для нее) совокупности всех собственных векторов (левых или правых) образуют матрицы преобразования к диагональному виду с собственными числами на диагонали

$$(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 \mid \dots \mid \mathbf{r}_n)^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 \mid \dots \mid \mathbf{r}_n) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Известно [3], что правый собственный вектор  $\mathbf{r}_0$  матрицы (5), отвечающей нулевому собственному значению  $\lambda$ , вычисленный в точке  $(\mathbf{x}_{i\delta}, \mathbf{y}_{i\delta})$ , совпадает с направлением нормали к поверхности  $\mathcal{L}$  в этой точке (см. рис. 1).

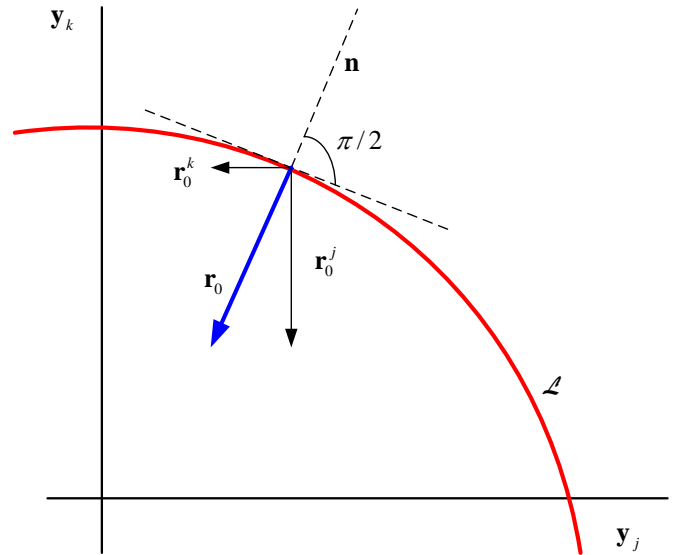


Рис. 1. Геометрическая интерпретация вектора  $\mathbf{r}_0$

Таким образом, вычислив в исследуемом предельном режиме компоненты вектора  $\mathbf{r}_0$ , можно определить направление изменения режима, наиболее эффективное для обеспечения устойчивости. По наибольшим из этих компонент можно локализовать элементы ЭЭС, изменение режимных параметров которых наиболее сильно влияет на устойчивость.

Оценку эффективности изменения структуры можно проводить следующим образом. Пусть  $\Omega$  – какая-либо обобщенная величина, характеризующая затраты на изменение структурного параметра  $\pi_k$  на величину  $\Delta\pi_k$ . В свою очередь изменение  $\Delta\pi_k$  приводит к изменению (3). При этом локализация слабых звеньев может рассматриваться как выявление мероприятий, обеспечивающих максимальное увеличение (3) при минимальных затратах  $\Omega$ .

Определим изменения режимных параметров, приводящих к ЭЭС к предельному по статической устойчивости режиму. Согласно теореме о непрерывном изменении собственных значений  $\lambda$  при непрерывном изменении элементов матрицы (5) малому изменению свободного члена  $a_0$  характеристического полинома (1) соответствует малое изменение простой матрицы  $\mathbf{A}$ . Тогда можно записать

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{i\delta}} + \Delta\mathbf{A}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{i\delta}}$  – матрица, отвечающая предельному по статической устойчивости режиму.

Так как рассматривается малое изменение структурного параметра  $\pi_k$ , не приводящее к существенному отклонению режима, в матрице  $\Delta\mathbf{A}$  ненулевыми будем считать только члены, относящиеся к этому параметру. При этом можно записать

$$\det \mathbf{A} = \det \left( \mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{i\delta}} + \Delta\mathbf{A} \right). \quad (11)$$

Будем считать, что нам необходимо определить запасы режимных параметров в некоторой выделенной части матрицы  $\mathbf{A}$  (см. рис. 2).

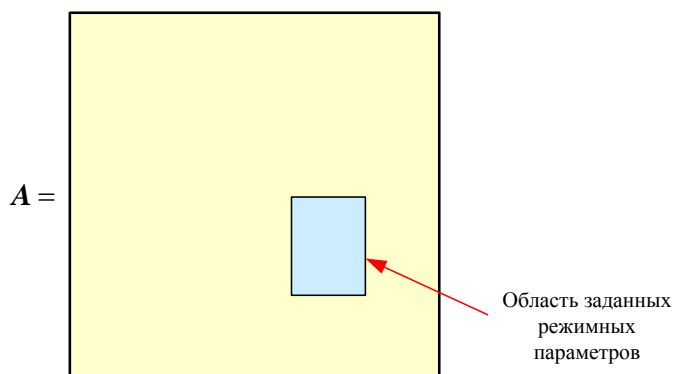


Рис. 2. Область заданных режимных параметров (элементов матрицы A)

Заметим, что путем эквивалентных преобразований (т.е. преобразований, не изменяющих инвариантов матрицы) матрицу, изображенную на рис. 2, можно привести, например, к виду, указанному на рис. 3.

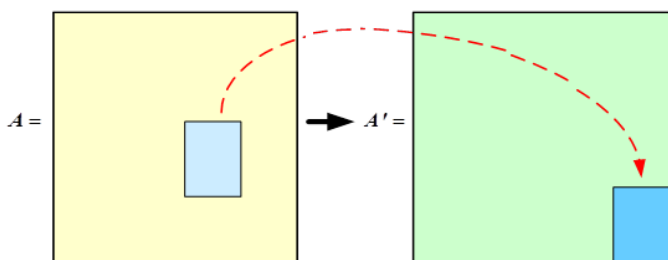


Рис. 3. Перемещение области заданных режимных параметров с помощью эквивалентных преобразований

В дальнейшем нам понадобится разработанный авторами оригинальный метод решения линейных матричных уравнений.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ  
Линейному матричному уравнению

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (12)$$

(здесь  $\mathbb{R}$  – множество вещественных чисел), посвящено чрезвычайно обширное множество публикаций. Далее мы опишем оригинальный метод полного и частичного решения уравнения (12), основанный на делителях нуля числовых матриц [7].

Будем рассматривать уравнение (12) в следующем блочном разбиении:

$$(\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}. \quad (13)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}, \quad \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2} \quad (14)$$

– прямоугольные подматрицы соответствующих размеров. При этом,  $n_1 + n_2 = n$ . Наглядно разбиение (13), (14) представлено на рис. 4.

Справедливо следующее утверждение.

Решение линейного уравнения

$$(\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}, \quad \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad n_1 + n_2 = n,$$

при обратимой матрице  $(\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2)$  определяется следующими эквивалентными формулами:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2), \\ \mathbf{x}_2 = (\mathbf{A}_1^\perp \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_1^\perp \mathbf{b}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = (\mathbf{A}_2^\perp \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_2^\perp \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_2^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1), \end{cases} \quad (17)$$

где  $\mathbf{A}_1^\perp, \mathbf{A}_2^\perp$  – левые делители нуля максимального ранга подматриц  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ , соответственно,  $\mathbf{A}_1^+, \mathbf{A}_2^+$  – левые обратные (например, псевдообратные) для подматриц  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ , соответственно.

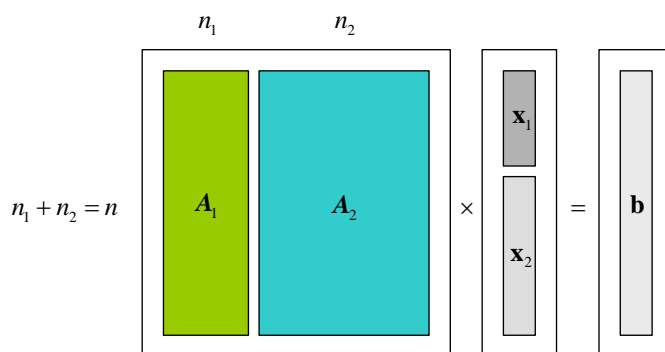


Рис. 4. Разбиение на блоки матрицы и векторов в линейном уравнении

Введем в рассмотрение для подматрицы  $\mathbf{A}_1$  обратимую матрицу

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{A}_1^+ \end{pmatrix}, \quad (18)$$

удовлетворяющую следующему тождеству:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{A}_1^+ \end{pmatrix} \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} \\ \mathbf{E}_{n_1} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{0}_{n_2 \times n_1}$  – нулевая матрица,  $\mathbf{E}_{n_1}$  – единичная матрица.

Аналогично, введем для подматрицы  $\mathbf{A}_2$  обратимую матрицу

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2^+ \\ \mathbf{A}_2^+ \end{pmatrix}, \quad (20)$$

удовлетворяющую следующему тождеству:

$$\mathbf{T}_2 \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2^+ \\ \mathbf{A}_2^+ \end{pmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{E}_{n_2} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Выполним невырожденное преобразование

$$\mathbf{T}_1 (\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{b}. \quad (22)$$

Раскрывая уравнение (22) с учетом (18), (19), получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{A}_1^+ \end{pmatrix} (\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{A}_1^+ \end{pmatrix} \mathbf{b},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_1^\perp A_2 \\ E_{n_1} & A_1^\perp A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\perp \mathbf{b} \\ A_1^\perp \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Из (23) следует, что рассматриваемое уравнение распадается на два уравнения

$$A_1^\perp A_2 \mathbf{x}_2 = A_1^\perp \mathbf{b}, \quad (24)$$

$$\mathbf{x}_1 + A_1^\perp A_2 \mathbf{x}_2 = A_1^\perp \mathbf{b},$$

первое из которых независимо от второго и имеет очевидное решение

$$\mathbf{x}_2 = (A_1^\perp A_2)^{-1} A_1^\perp \mathbf{b}, \quad (25)$$

а второе легко приводится к виду

$$\mathbf{x}_1 = A_1^\perp (\mathbf{b} - A_2 \mathbf{x}_2). \quad (26)$$

Но это и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается формула решения (17).

Отметим, что в (25) требуется выполнять обращение матрицы размером  $n_2 \times n_2$ , где  $n_2 < n$ .

Из приведенного выше утверждения вытекают два следствия.

1. Пусть требуется найти частичное решение  $\mathbf{x}_1$  линейного уравнения

$$(A_1 \parallel A_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, n_1 + n_2 = n,$$

где матрица  $(A_1 \parallel A_2)$  – обратима. Тогда частичное решение  $\mathbf{x}_1$  равно

$$\mathbf{x}_1 = (A_2^\perp A_1)^\perp A_2^\perp \mathbf{b}, \quad A_2^\perp A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}.$$

2. Пусть требуется найти частичное решение  $\mathbf{x}_2$  линейного уравнения

$$(A_1 \parallel A_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, n_1 + n_2 = n,$$

где матрица  $(A_1 \parallel A_2)$  – обратима. Тогда частичное решение  $\mathbf{x}_2$  равно

$$\mathbf{x}_2 = (A_1^\perp A_2)^\perp A_1^\perp \mathbf{b}, \quad A_1^\perp A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}.$$

Рассмотрим методический пример. Пусть задано уравнение (13) со следующим разбиением матриц и векторов:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

и требуется определить только частичное решение, а именно, субвектор

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (28)$$

Воспользуемся формулой (25), предварительно определив делитель нуля  $A_1^\perp$ :

$$A_1^\perp = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & -3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -6 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

В результате получаем

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/30 \\ -1/3 \\ -13/30 \\ -4/15 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

но это и есть точное значение субвектора (28).

#### ОЦЕНКА ЗАПАСА РЕЖИМНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЭЭС

Воспользуемся описанным выше методом для формирования алгоритма решения задачи оперативного определения мест, приводящих к нарушению статической устойчивости ЭЭС. Для простоты будем считать, что нас интересуют режимные параметры, которые локализованы в подматрице  $A_2$ . Будем также полагать, что в исходном режиме матрица

$$A = (A_1 \parallel A_2)$$

апериодически устойчива.

Рассмотрим шаги синтезированного алгоритма.

1 шаг. Выполнить преобразование матрицы  $A = (A_1 \parallel A_2)$  по формуле

$$\begin{pmatrix} A_1^\perp \\ A_1^\perp \end{pmatrix} (A_1 \parallel A_2) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & A_1^\perp A_2 \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_1^\perp A_2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

полагая, что матрица  $A_1^\perp$  удовлетворяет уравнению

$$A_1^\perp (A_1^\perp)^\top = E_{n_1},$$

т.е.  $A_1^\perp$  является ортогональным проектором [8].

2 шаг. Для квадратной невырожденной матрицы  $A_1^\perp A_2$  размера  $n_2 \times n_2$  найти собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2}$  (корни характеристического полинома матрицы  $A_1^\perp A_2$ ) и выбрать из них наименьшее по модулю вещественное число  $\lambda_{\min}$ .

Если среди  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2}$  таких нет, то выполнить преобразование

$$U \cdot A_1^\perp$$

где  $U$  – произвольная унитарная матрица размера  $n_2 \times n_2$ .

Вычислить собственные значения  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n_2}$  матрицы  $U A_1^\perp A_2$  и выберем из них наименьшее по модулю вещественное число  $\lambda'_{\min}$  и т.д.

**3 шаг.** Пусть  $\lambda_{\min}$  найдено, тогда матрица

$$A_1^+ A_2 - \lambda_{\min} E_{n_2} \quad (32)$$

является вырожденной, а число  $\lambda_{\min}$  определяет ближайшее «смещение» матрицы  $A_1^+ A_2$  к вырожденности.

**4 шаг.** Сформировать матрицу

$$A_2 - \lambda_{\min} (A_1^+)^+, \quad (33)$$

где  $(A_1^+)^+$  – псевдообратная матрица к матрице  $A_1^+$ . Матрица (33) по определению является вырожденной.

**5 шаг.** В силу 4 шага скорректировать матрицу

$$\left( A_1 \begin{matrix} \vdots \\ A_2 - \lambda_{\min} (A_1^+)^+ \end{matrix} \right)^+, \quad (34)$$

которая также будет вырожденной “ближайшим” смещением.

**6 шаг.** Запасы режимных параметров определить по значениям элементов матрицы

$$\lambda_{\min} (A_1^+)^+. \quad (35)$$

В качестве расчетного примера рассмотрим линейную модель объединенной энергосистемы (ОЭС). Эта модель описывает схему реальной энергосистемы с сетями 220-750 кВ. Она включает в себя восемь концентрированных подсистем, соединенных относительно слабыми связями. Схема ОЭС содержит 286 узлов, 531 ветвей, 129 генераторов. Для описания генераторов использовались модели динамических звеньев 2-го порядка с учетом переходных

процессов в обмотке возбуждения и поперечном демпферном контуре. Матрица Якоби  $A$  состояния данной энергосистемы имеет 258 порядок, т.е.  $A \in \mathbb{R}^{258 \times 258}$ , и является апериодически устойчивой.

Значения элементов матрицы  $A$  модели ОЭС приведен на рис. 5, где в планарном представлении наглядно видно введенное разбиение по типу (13).

Следуя приведенному выше алгоритму, вычислим матрицу  $A_1^+$  для модели ОЭС. В данном случае она равна

$$A_1^+ = \begin{pmatrix} E_{129} & \vdots \\ \mathbf{0}_{129 \times 129} \end{pmatrix}$$

и действительно является ортогональным проектором.

Найдем произведение матриц  $A_1^+ A_2$ , которое будет иметь размер  $129 \times 129$ .

Найдем далее собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{129}$  матрицы  $A_1^+ A_2$ . Наименьшее из них  $\lambda_{\min}$  с точностью до 6 знаков после запятой равно  $-123,507484$ .

Вычислим далее матрицу  $(A_1^+)^+$ :

$$(A_1^+)^+ = \begin{pmatrix} E_{129} \\ \mathbf{0}_{129 \times 129} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, запасы по статической устойчивости рассматриваемой ОЭС в данном случае определяются элементами матрицы

$$\lambda_{\min} (A_1^+)^+ = -123,507484 \cdot \begin{pmatrix} E_{129} \\ \mathbf{0}_{129 \times 129} \end{pmatrix}.$$

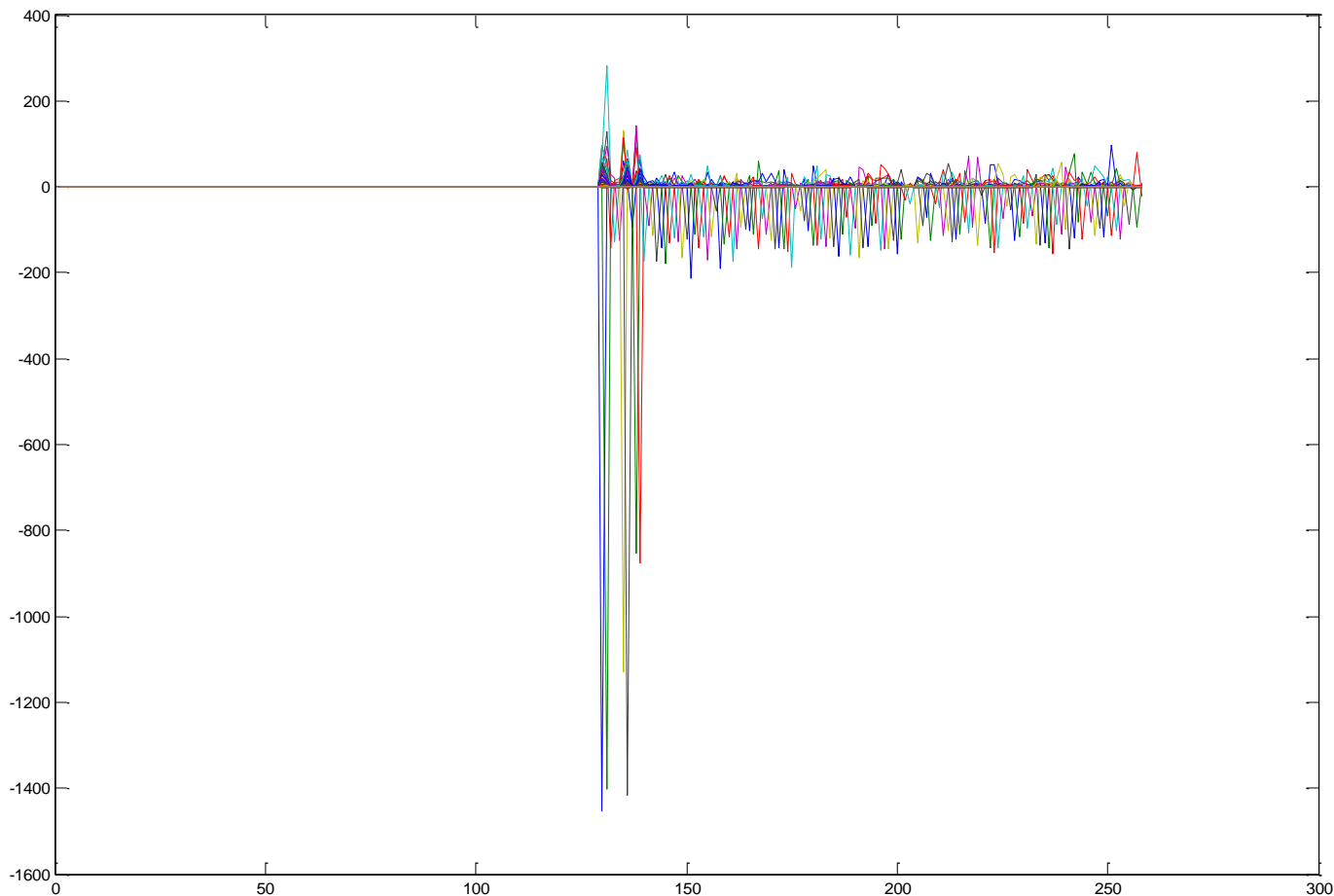


Рис. 5. Значения элементов матрицы  $A$



Отметим, что каждая смещаемая матрица

$$\left( A_1 \quad \vdots \quad A_2 - \sigma(A_1^+)^+ \right),$$

где  $\sigma < 0$  и  $|\sigma| < |\lambda_{\min}|$  является аperiodически устойчивой. При достижении равенства  $\sigma = \lambda_{\min}$  происходит бифуркация положения равновесия, т.е. модель ОЭС теряет свойство статической устойчивости.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм оперативного определения слабых звеньев, приводящих к нарушению условий статической устойчивости ЭЭС. Под слабыми звеньями понимается места или элементы ЭЭС, изменение параметров которых наиболее сильно влияет на статическую устойчивость всей системы. Информация об этих элементах может быть получена на основе анализа матрицы Якоби. Компоненты матрицы Якоби являются функциями структурных и режимных параметров ЭЭС. Если матрица Якоби является недефектной (простой), то путем спектрального преобразования с помощью матриц ее левых или правых собственных векторов, матрица Якоби может быть приведена к диагональному виду с диагональными элементами в виде собственных значений этой матрицы.

Вычисляя в исследуемом предельном режиме компоненты собственного вектора матрицы Якоби, отвечающего нулевому собственному значению, можно определить направление изменения режима, наиболее сильно влияющего на запасы статической устойчивости ЭЭС. По наибольшему из этих компонент можно локализовать элементы матрицы Якоби, изменение которых оказывает наиболее сильное влияние на статическую устойчивость ЭЭС.

Предложенный алгоритм позволяет оперативно определять слабые звенья, приводящие к нарушению статической устойчивости. В основе алгоритма лежит метод частичного решения линейного матричного уравнения на основе матричных делителей нуля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гурский С.Г. Алгоритмизация задач управления режимами сложных систем в электроэнергетике. – Минск: Наука и Техника, 1977.
2. Войтов О.Н. Анализ неоднородностей электроэнергетических систем. / О.Н. Войтов, Н.И. Воропай, А.З. Гамм, И.И. Голуб, Д.Н. Ефимов. – Новосибирск: Наука, 1999.
3. Гамм А.З. Обнаружение слабых мест в электроэнергетической системе // Изв. РАН. Энергетика. – 1992. – №3.
4. Конторович А.М. Уравнения предельных режимов и их использование для решения задач управления энергосистемами. Методы исследования устойчивости сложных энергосистем и их использование. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления. / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высш. шк. 1998.
6. Голуб Дж. Матричные вычисления. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоан. – М.: Мир, 1999.
7. Мисриханов М.Ш. Алгебраические и матричные методы в теории линейных МИМО-систем / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2005. – Вып. 5. – С. 196-240.
8. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001.

## The Operational Definition Algorithm of Weak Links Network, Leading to Violation of the Small Signal Stability

Abdurahmanov A.M., Zimin K.A.

R&D Center FGS UES  
Moscow, Russian Federation  
[abdurahmanov@ntc-power.ru](mailto:abdurahmanov@ntc-power.ru)

Ryabchenko V.N.

Bauman Moscow State Technical University  
Moscow, Russian Federation  
[ryabchenko.vn@gmail.com](mailto:ryabchenko.vn@gmail.com)

**Abstract.** Considered a computing matrix algorithm to quickly identify weaknesses that lead to the violation of the small signal stability of the linear model of the electric power system. The algorithm is based on the method of partial solutions of linear matrix equation based on the use of zero divisors (annihilators) matrices. Features of the algorithm shown in the model of the interconnection with the Jacobi matrix containing 286 units, 531 branches and 129 generators.

**Keywords:** power system, weak links, small signal stability, Jacobi matrix, linear matrix equation, a partial solution, a zero divisor (annihilator) of the matrix.

#### REFERENCES

1. Gurskiy S.G. *Algoritmizatsiya zadach upravleniya rezhimami slozhnykh sistem v elektroenergetike* [Algorithmization management tasks modes of complex systems in the power industry], Minsk: Nauka i Tekhnika, 1977. (in Russ.)
2. Voytov O.N., Voropay N.I., Gamm A.Z., Golub I.I., Yefimov D.N. *Analiz neodnorodnostey elektroenergeticheskikh sistem* [Analysis of electric power systems of irregularities], Novosibirsk: Nauka, 1999. (in Russ.)
3. Gamm A.Z. Detection of weak spots in the electric power system [Obnaruzheniye slabnykh mest v elektroenerget-

icheskoj sisteme], *Izv. RAN. Energetika [Math. Russian Academy of Sciences. Energy]*, 1992, no.3. (in Russ.)

4. Kontorovich A.M. *Uravneniya predelnykh rezhimov i ikh ispolzovaniye dlya resheniya zadach upravleniya energosistemami. Metody issledovaniya ustoychivosti slozhnykh energosistem i ikh ispolzovaniye* [Equations limiting regimes and their use to address energy systems management tasks. Methods of studying the stability of complex power systems and their use], Moscow, Energoatomizdat, 1985. (in Russ.)

5. Afanasyev V.N., Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya*

[The mathematical theory of designing control systems], Moscow, Vyssh. shk., 1998. (in Russ.)

6. Golub Dzh., Van Loan Ch. *Matrichnyye vychisleniya* [Matrix calculations], Moscow, Mir, 1999. (in Russ.)

7. Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and matrix methods in the theory of linear MIMO-systems [Algebraicheskiye i matrichnyye metody v teorii lineynykh MIMO-sistem], *Vestnik IGEU [Herald of ISPU]*, 2005, is. 5, pp. 196-240. (in Russ.)

8. Demmel Dzh. *Vychislitel'naya lineynaya algebra. Teoriya i prilozheniya* [The computational linear algebra. Theory and Applications], Moscow, Mir, 2001. (in Russ.)

---

#### **Библиографическое описание статьи**

Абдурахманов А.М. Алгоритм оперативного определения слабых звеньев сети, приводящих к нарушению статической устойчивости / А.М. Абдурахманов, К.А. Зимин, В.Н. Рябченко // *Электротехника: сетевой электронный научный журнал*. – 2016. – Т.3, №3. – С. 20-26.

#### **Reference to article**

Abdurahmanov A.M., Zimin K.A., Ryabchenko V.N. The operational definition algorithm of weak links network, leading to violation of the small signal stability, *Russian Internet Journal of Electrical Engineering*, 2016, vol.3, no.3, pp. 20-26.